آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : **هندسه**	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : **ریاضی**	**پایه ی دوازدهم دوره ی متوسطه**	تعداد صفحات : **۷ صفحه**
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	**جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید**		

ردیف	سوالات	نمره

۱ دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد.

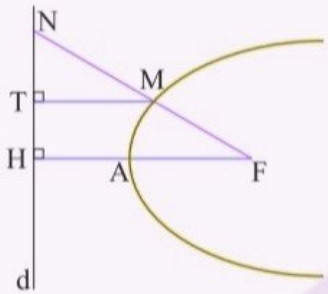
امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه شهریور ۱۴۰۱

۲ یک دیش مخابراتی به شکل سهموی با دهانهٔ دایره‌ای به قطر ۶۰ واحد و گودی (عمق) ۹ واحد مفروض است؛ فاصلهٔ کانونی این دیش را به دست آورید.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه خرداد ۱۴۰۰

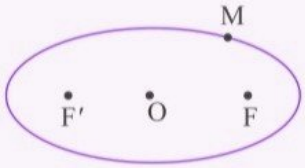
۳ در شکل زیر، سهمی با رأس A، کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در نقطهٔ N قطع کند و از نقطهٔ M، MT را بر d عمود کرده‌ایم.

ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$



امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه دی ۱۴۰۲

۴ در شکل زیر نقطهٔ M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه ای رسم کنید که در نقطهٔ M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطهٔ F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید: $NF' = MF'$

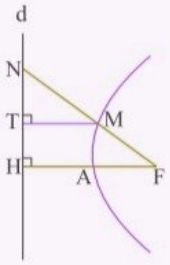


امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه شهریور ۱۳۹۹

۵ معادلهٔ دایره‌ای بنویسید که مرکز آن $O(۰,۱)$ باشد و با دایره با معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۸x + ۴y + ۱۶ = ۰$ مماس داخل باشد.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه شهریور ۱۳۹۹

۶ در شکل زیر سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از نقطهٔ M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید $\frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$.



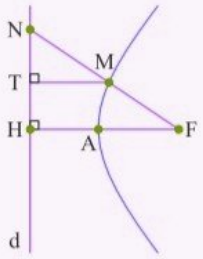
کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه تمرین

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۷ مختصات کانون، رأس و معادلهٔ خط هادی سهمی به معادلهٔ $y^{۲} - ۶y + ۱۶x + ۲۵ = ۰$ را تعیین کنید.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه شهریور ۱۳۹۹

۸ در شکل زیر که با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است، از کانون F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا خط d را در N قطع کند و از نقطهٔ M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$



امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه خرداد ۱۴۰۱

۹ دو نقطهٔ A و B و خط d که شامل هیچ‌یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

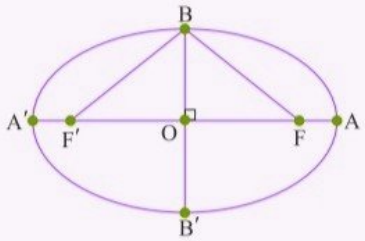
امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه شهریور ۱۴۰۴

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۱۰ در دایره به معادلهٔ ضمنی $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ با استفاده از روش مربع کامل ، ثابت کنید شعاع دایره برابر با $r = \frac{\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c}}{۲}$ است.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه دی ۱۴۰۱

۱۱ در شکل زیر اگر $OA = a$، $OB = b$ و $OF = c$ باشد، ثابت کنید: $a^۲ = b^۲ + c^۲$



امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه خرداد ۱۴۰۰

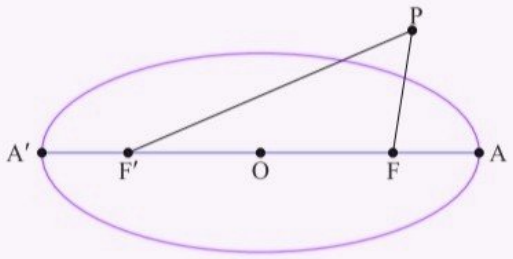
به سؤالات زیر پاسخ دهید.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه شهریور ۱۴۰۳

۱۲ خروج از مرکز یک بیضی با اندازهٔ قطرهای ۴ و ۶ را بیابید.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

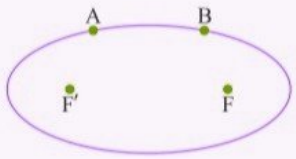
۱۳ نقطهٔ P، بیرون بیضیِ با قطر بزرگِ $AA' = ۲a$ و کانون‌های F و F'، مفروض است.
ثابت کنید: $PF + PF' > ۲a$.



۱۴ وضعیت خط $x - y - ۱ = ۰$ و دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + ۳ = ۰$ را نسبت به هم مشخص کنید.

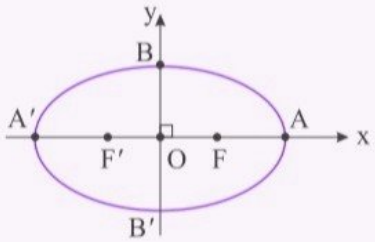
امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه شهریور ۱۳۹۹

۱۵ در شکل زیر دو نقطه A و B روی بیضی با کانون‌های F و F' قرار دارند. اگر $AF' = BF$ و همچنین AF و BF' یکدیگر را درون بیضی در نقطه‌ای مانند M قطع کنند، نشان دهید مثلث FMF' متساوی الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی قرار دارد.



امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه خرداد ۱۴۰۲

۱۶ مرکز بیضی زیر بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصلهٔ F از هر دو نقطهٔ A و O برابر ۴ است. طول قطر کوچک بیضی را محاسبه کنید.

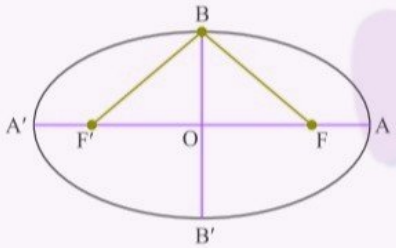


امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه شهریور ۱۳۹۹

۱۷ معادلهٔ قطر کانونی یک بیضی، $y = -۱$ و معادلهٔ قطر کوچک، $x = ۲$ است. اگر طول قطرهای بزرگ و کوچک به ترتیب ۱۲ و ۸ واحد باشند، مرکز بیضی و فاصلهٔ کانونی را به دست آورید.

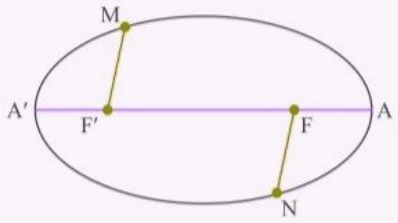
امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی دی ۱۴۰۲

۱۸ در بیضی زیر با کانون‌های F و F'، طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازهٔ زاویهٔ $O\hat{F}B$ را به‌دست آورید.



امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه شهریور ۱۴۰۴

۱۹ در شکل زیر دو نقطهٔ M و N روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. با فرض $MF' = NF$، نشان دهید MF موازی NF' است.



امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه خرداد ۱۴۰۴

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

ردیف	پاسخنامه	نمره

۱ مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه A و B به یک فاصله‌اند عمودمنصف پاره‌خط AB است این خط را رسم می‌کنیم و l می‌نامیم. مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر هستند دو خط d' و d'' می‌باشند که موازی d هستند.
محل برخورد دو خط d' و d'' با خط l جواب مسأله است.

الف- اگر خط l دو خط d' و d'' را قطع کند مسئله دو جواب دارد.

ب- اگر خط l بر یکی از دو خط d' یا d'' منطبق باشد مسئله بی‌شمار جواب دارد.

پ- اگر خط l هیچ یک از دو خط d' و d'' را قطع نکند مسئله جواب ندارد.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه شهریور ۱۴۰۱

۲ اگر قطر دهانهٔ دیش را با $۲b$ و گودی را با h نمایش دهیم، فاصلهٔ کانونی برابر $a = \frac{۴b^۲}{۱۶h}$ است.
$h = ۹$ و $۲b = ۶۰$ با جایگذاری در رابطهٔ فوق داریم:

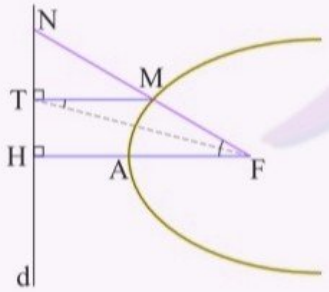
$$a = \frac{(۲b)(۲b)}{۱۶h} = \frac{۶۰ \times ۶۰}{۱۶(۹)} = ۲۵$$

(اگر رابطهٔ فوق به‌صورت $a = \frac{b^۲}{۴h} = \frac{(۳۰)^۲}{۴(۹)} = ۲۵$ نوشته شود درست است)

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه خرداد ۱۴۰۰

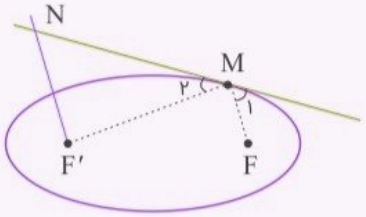
۳ بنا به تعریف سهمی $MT = MF$ و لذا مثلث MFT متساوی الساقین است، پس $M\hat{T}F = M\hat{F}T$. ازطرفی $MT \parallel FH$ و FT خط مورب می‌باشد، پس بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب $M\hat{T}F = T\hat{F}H$. از دو رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود که TF نیمساز زاویهٔ $N\hat{F}H$ می‌باشد.
با استفاده از قضیهٔ نیمساز در مثلث FHN داریم:

$$\frac{NF}{FH} = \frac{NT}{TH} \Rightarrow \frac{NF}{۲FA} = \frac{NT}{TH} \Rightarrow \frac{NF}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$$



امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه دی ۱۴۰۲

۴ مجموع $MF + MF'$ کمترین مقدار است، بنابه خاصیت کوتاه‌ترین مسیر، زاویه‌های $\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲$ ازطرفی: $MF \parallel NF'$ و d مورب، درنتیجه $\hat{N} = \hat{M}_۱$ (d خط شامل نقاط M و N است)
نتیجه می‌شود: $\hat{N} = \hat{M}_۲$ مثلث MNF' متساوی الاساقین است، یعنی $MF' = NF'$.



امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه شهریور ۱۳۹۹

۵

$$(x-۴)^۲ + (y+۲)^۲ = ۴ \Rightarrow O'(۴,-۲) \quad , \quad r' = ۲ \quad (۰/۵)$$

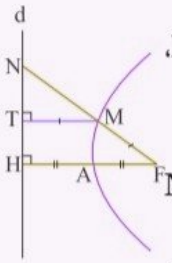
$$OO' = \sqrt{۴^۲ + ۳^۲} = ۵ \quad (۰/۲۵)$$

$$|r - r'| = OO' \xrightarrow{(۰/۲۵)} |r-۲| = ۵ \xrightarrow{(۰/۲۵)} \begin{cases} r = ۷ \ (۰/۲۵) \\ r = -۳ \ (۰/۲۵) \quad \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^۲ + (y-۱)^۲ = ۴۹ \quad (۰/۲۵)$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه شهریور ۱۳۹۹

۶



اولاً چون نقطهٔ M روی سهمی قرار دارد، $MF = MT$ و چون نقطهٔ A رأس سهمی است، $HA = AF$،
حال داریم:

$$\overset{\Delta}{NHF} : TM \| HF \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{TM}{HF} = \frac{NM}{FN} \xrightarrow[HF=۲FA]{TM=MF} \frac{MF}{۲FA} = \frac{NM}{FN}$$

$$\Rightarrow \frac{FN}{۲FA} = \frac{NM}{MF} \xrightarrow{\times ۲} \frac{FN}{FA} = ۲\left(\frac{NM}{MF}\right) \quad (*)$$

$$\text{قضیهٔ تالس} \Rightarrow \frac{NM}{MF} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{(*)} \frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$$

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه تمرین

۷ فرم استاندارد سهمی به‌صورت $(y-۳)^۲ = -۱۶(x+۱)$ است . سهمی افقی و دهانهٔ سهمی به سمت چپ باز می‌شود . رأس سهمی نقطهٔ $A(-۱,۳)$ است و $a = ۴$ مختصات کانون آن نقطهٔ $F(-a+h,k) = (-۵,۳)$ است . معادلهٔ خط هادی سهمی به صورت $x = a + h = ۳$ است.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه شهریور ۱۳۹۹

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۸

روش اول:

بنابه تعریف سهمی $MF = MT$ مثلث MFT متساوی‌الساقین است: $M\hat{T}F = T\hat{F}M$ (۱)

از طرفی بنابه خطوط موازی $FH || MT$ و مورب FT نتیجه می‌شود: $M\hat{T}F = T\hat{F}H$ (۲)

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود TF نیمساز است. بنابه قضیهٔ نیمساز در مثلث FHN داریم:

$$\frac{NF}{FH} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{FH=۲FA} \frac{NF}{۲FA} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{\times ۲} \frac{NF}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$$

روش دوم:

$FH || MT$ باتوجه‌به قضیهٔ تالس در مثلث NHF:

$$\begin{cases} \frac{NM}{MF} = \frac{NT}{TH} \\ \frac{MT}{FH} = \frac{NM}{NF} \end{cases} \xrightarrow{MT=MF} \frac{NF}{FH} = \frac{NM}{MF}$$

$$\xrightarrow{FH=۲FA} \frac{NF}{۲FA} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{\times ۲} \frac{NF}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه خرداد ۱۴۰۱

۹

روش اول:

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقاط A و B فاصلهٔ برابر دارند، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

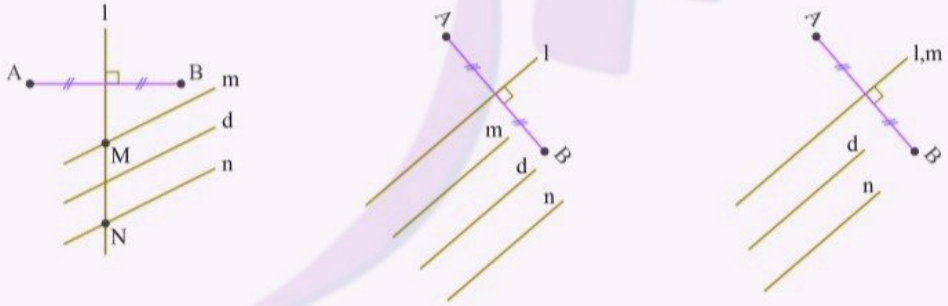
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشند، دو خط موازی با d و به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از آن است.

نقاط برخورد عمودمنصف با دو خط موازی جواب مسئله است.

بحث:

- حالت اول: اگر خط عمودمنصف، هر دو خط موازی را قطع کند، مسئله دارای دو جواب است.
- حالت دوم: اگر خط عمودمنصف، دو خط موازی را قطع نکند، مسئله جواب ندارد.
- حالت سوم: اگر خط عمودمنصف، منطبق بر یکی از دو خط موازی باشد، مسئله دارای بی‌شمار جواب است.

روش دوم:



مسأله دو جواب دارد — مسأله جواب ندارد — مسأله بی‌شمار جواب دارد

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه شهریور ۱۴۰۴

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۱۰

$$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$$
$$\Rightarrow (x^۲ + ax + \frac{a^۲}{۴}) + (y^۲ + by + \frac{b^۲}{۴}) = -c + \frac{a^۲}{۴} + \frac{b^۲}{۴}$$
$$(x + \frac{a}{۲})^۲ + (y + \frac{b}{۲})^۲ = \frac{a^۲ + b^۲ - ۴c}{۴} \Rightarrow r^۲ = \frac{a^۲ + b^۲ - ۴c}{۴}$$
$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c}}{۲}$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه دی ۱۴۰۱

۱۱ نقطهٔ B روی عمودمنصف پاره‌خط FF' قرار دارد، درنتیجه:

$$BF = BF' \qquad (۱)$$

فاصلهٔ هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر است با قطر بزرگ بیضی:

$$BF + BF' = ۲a \xrightarrow{(۱)} BF = BF' = a$$

بنابه رابطهٔ فیثاغورس در مثلث BOF داریم:

$$OF^۲ + OB^۲ = BF^۲ \Rightarrow c^۲ + b^۲ = a^۲$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه خرداد ۱۴۰۰

پاسخ سؤالات ۱۲ تا ۱۳

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه شهریور ۱۴۰۳

۱۲ روش اول:

$$\begin{cases} ۲a = ۶ \Rightarrow a = ۳ \\ ۲b = ۴ \Rightarrow b = ۲ \end{cases}$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۹ = ۴ + c^۲ \Rightarrow c = \sqrt{۵}$$

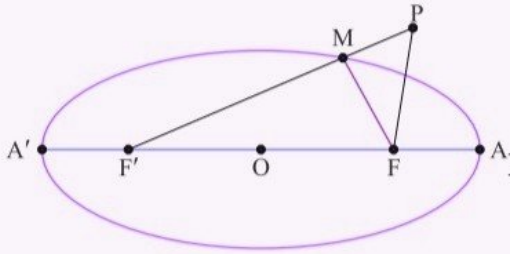
$$\Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

روش دوم:

$$\begin{cases} ۲a = ۶ \Rightarrow a = ۳ \\ ۲b = ۴ \Rightarrow b = ۲ \end{cases}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^۲ - b^۲}}{a} = \sqrt{۱ - \frac{b^۲}{a^۲}}$$
$$= \sqrt{۱ - \frac{۴}{۹}} = \sqrt{\frac{۵}{۹}} = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

۱۳ محل تلاقی PF' با بیضی را M می‌نامیم.



در مثلث PMF، بنابر قضیهٔ نامساوی مثلث داریم:

$$PF + MP > MF$$

پس با افزودن MF' به طرفین نامساوی خواهیم داشت:

$$PF + \underbrace{MP + MF'}_{PF'} > MF + MF'$$

$$\Rightarrow PF + PF' > ۲a$$

۱۴

$$(x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۲ \Rightarrow O(۱,-۲) \ , \ r = \sqrt{۲}\,(۰/۵)$$

$$d = \frac{|۱+۲-۱|}{\sqrt{۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}\,(۰/۵)$$

$r = d$، پس خط بر دایره مماس است. (۰/۲۵)

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه شهریور ۱۳۹۹

۱۵ نقاط A و B روی بیضی قرار دارد، باتوجه‌به تعریف بیضی:

$$AF + AF' = ۲a = BF + BF' \xrightarrow{AF'=BF} AF = BF'$$

دو مثلث AFF' و BFF' بنا به حالت ($AF = BF'$, $AF' = BF$, $FF' = FF'$) برابری سه ضلع همنهشت هستند، درنتیجه دو زاویه $A\hat{F}F' = B\hat{F'}F$، مثلث MFF' متساوی الساقین است و $MF = MF'$ یعنی M روی عمودمنصف پاره خط FF' (قطر کوچک بیضی) است.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه خرداد ۱۴۰۲

۱۶

$$OF = c = ۴ \ , \ \ OA = a = ۸ \xrightarrow{(۰/۵)} b^۲ = a^۲ - c^۲ = \underbrace{۶۴ - ۱۶ = ۴۸}_{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{b = ۴\sqrt{۳}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow ۲b = ۸\sqrt{۳} \ \ (۰/۲۵)$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه شهریور ۱۳۹۹

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۱۷ مرکز بیضی محل برخورد قطر کانونی و قطر کوچک است، پس $O(۲, -۱)$. باتوجه‌به اینکه $AA' = ۱۲$ و $BB' = ۸$، بنابراین:

$$AA' = ۲a = ۱۲ \Rightarrow a = ۶$$
$$BB' = ۲b = ۸ \Rightarrow b = ۴$$

همچنین:

$$c^۲ = ۳۶ - ۱۶ = ۲۰ \Rightarrow c = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow FF' = ۲c = ۴\sqrt{۵}$$

امتحان نهایی علوم تجربی دوازدهم ریاضی دی ۱۴۰۲

۱۸ راه‌حل اول:

$$a = ۲b \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow c = \sqrt{۳}b$$

$$\tan(O\hat{F}B) = \frac{OB}{OF} = \frac{b}{\sqrt{۳}b} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow O\hat{F}B = ۳۰^\circ$$

راه‌حل دوم:

$$a = ۲b \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow c = \sqrt{۳}b$$

$$\tan(O\hat{B}F = \frac{OF}{OB} = \frac{\sqrt{۳}b}{b} = \sqrt{۳} \Rightarrow O\hat{B}F = ۶۰^\circ \Rightarrow O\hat{F}B = ۳۰^\circ$$

راه‌حل سوم:

$$a = ۲b, \cos(O\hat{B}F) = \frac{OB}{BF} = \frac{b}{a} = \frac{b}{۲b} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow O\hat{B}F = ۶۰^\circ \Rightarrow O\hat{F}B = ۳۰^\circ$$

راه‌حل چهارم:

$$a = ۲b, \sin(O\hat{F}B) = \frac{OB}{BF} = \frac{b}{a} = \frac{b}{۲b} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow O\hat{F}B = ۳۰^\circ$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه شهریور ۱۴۰۴

۱۹ M روی بیضی است، پس داریم: $MF + MF' = ۲a$
N روی بیضی است، پس داریم: $NF + NF' = ۲a$
پس:

$$MF + MF' = NF + NF' \xrightarrow{MF'=NF} MF = NF'$$

بنابراین چهارضلعی $MFNF'$ متوازی‌الاضلاع است لذا $MF \parallel NF'$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم هندسه خرداد ۱۴۰۴